TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL
ORIENTE DEL ESTADO DE MÉXICO

Cuadernillo de apuntes

Cálculo Integral

M. en C. Luis Ignacio Sandoval Paéz

La Paz, estado de México. Diciembre 2011.

Índice

Página

Cálculo Integral

Introducción

Buscando la comprensión del significado de la integral se propone un tratamiento que comience por lo concreto y pase luego a lo abstracto, así se sugiere que la integral definida se estudie antes de la indefinida puesto que aquélla puede ser abordada a partir del acto concreto de medir áreas.

Se incluye la notación sumatoria para que el alumno la conozca y la maneje en la representación de sumas de Riemann. La función primitiva se define junto con el Teorema Fundamental por estar íntimamente ligados. Las integrales impropias se ubican en esta unidad por ser un caso de integral definida, para aprovechar el contexto.

Una vez que se abordó la construcción conceptual de la integral definida, se estudian la integral indefinida y los métodos de integración, para tener más herramientas en la construcción de la antiderivada, necesaria para aplicar el Teorema Fundamental.

Las aplicaciones incluidas en el temario son las básicas, adecuadas a las competencias previas de los estudiantes, con el objetivo que sean ellos quienes planteen por sí mismos la integral a aplicar y resolver. Se complementa el tratamiento de aplicaciones con la identificación, por parte del alumno, de la integral en diferentes temas de ingeniería. Se incluye la serie de Taylor puesto que el cálculo de algunas integrales se facilita o posibilita representando la función a integrar como una serie de potencias.

Unidad I
Teorema fundamental del cálculo

Objetivos:

Contextualizar el concepto de integral definida.
Visualizar la relación entre cálculo diferencial y el cálculo integral.
Calcular integrales definidas.

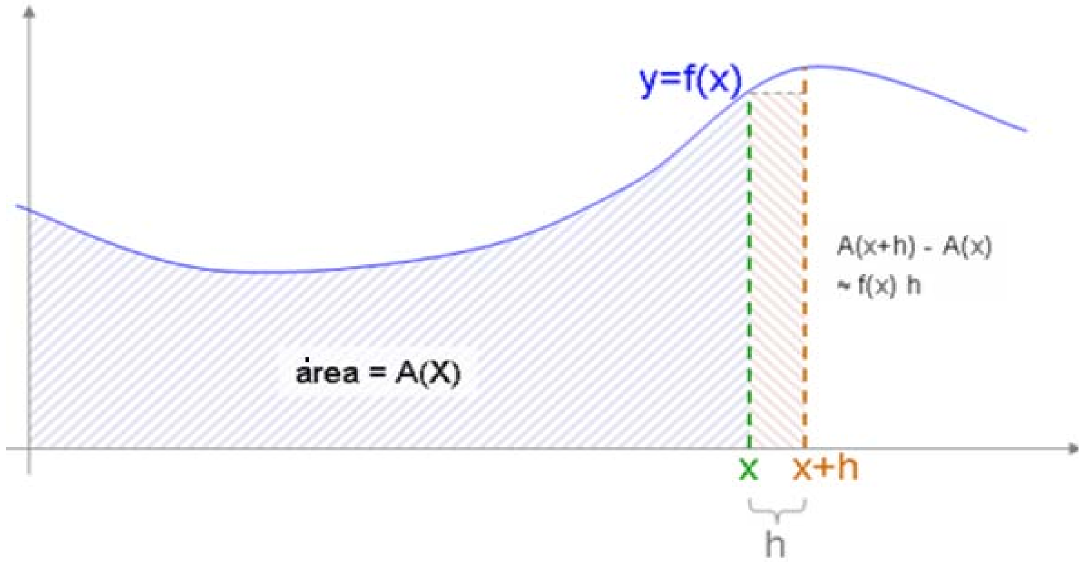
El **teorema fundamental del cálculo** consiste (intuitivamente) en la afirmación de que la derivación e integración de una función son operaciones inversas. Esto significa que toda función continua integrable verifica que la integral de su derivada es igual a ella misma.

El teorema es fundamental porque hasta entonces el cálculo aproximado de áreas -integrales- en el que se venía trabajando desde Arquímedes, era una rama de las matemáticas que se seguía por separado al cálculo diferencial que se venía desarrollando por Isaac Newton, Isaac Barrow y Gottfried Leibniz en el siglo XVIII y dio lugar a conceptos como el de las derivadas. Las integrales eran investigadas como formas de estudiar áreas y volúmenes, hasta que en este punto de la historia ambas ramas convergen, al demostrarse que el estudio del "área bajo una función" estaba íntimamente vinculado al cálculo diferencial, resultando la integración, la operación inversa a la derivación.

1.1 Medición aproximada de figuras amorfas.

Intuición geométrica

Supóngase que se tiene una función continua $y = f(x)$ y que su representación gráfica es una curva. Entonces, para cada valor de x tiene sentido de manera intuitiva pensar que existe una función $A(x)$ que representa el área bajo la curva entre 0 y x aún sin conocer su expresión.



Supóngase ahora que se quiere calcular el área bajo la curva entre *x* y *x+h*. Se podría hacer hallando el área entre 0 y *x+h* y luego restando el área entre 0 y *x*. En resumen, el área sería $A(x+h) - A(x)$.

Otra manera de estimar esta misma área es multiplicar *h* por f(*x*) para hallar el área de un rectángulo que coincide aproximadamente con la región. Nótese que la aproximación al área buscada es más precisa cuanto más pequeño sea el valor de *h*.
Para aproximar el área de una figura amorfa, se divide la figura en una cierta cantidad de pequeños rectángulos, para obtener el área de cada uno de ellos y después sumarlos.

1.2 Notación sumatoria.

Los números cuya suma se indica en una notación sigma pueden ser naturales, complejos u objetos matemáticos más complicados. Si la suma tiene un número infinito de términos, se conoce como serie infinita.

Dada una sucesión:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$$

Ésta se puede representar como la suma de los n primeros términos con la notación de sumatoria o **notación sigma**. El nombre de esta notación se denomina de la letra griega Σ (sigma mayúscula, que corresponde a nuestra S de **"suma"**). La notación sigma es de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n$$

La ecuación anterior se lee la "suma de a_k desde $k=1$ hasta $k=n$." La tetra k es el **índice de la suma** o **variable de la sumatoria** y se reemplaza k en la ecuación después de sigma, por los enteros 1, 2, 3, 4, 5, …., n, y se suman las expresiones que resulten, con lo que resulte del lado derecho de la ecuación

Ejemplo 1: Calcule la siguiente Serie: $\sum_{k=1}^{5} k^2$

Solución:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

Ejemplo 2: $\sum_{j=3}^{5} \frac{1}{j}$

Solución:

$$\sum_{j=3}^{5} \frac{1}{j} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{20+15+12}{(3)(4)(5)} = \frac{47}{60}$$

Ejemplo 3: $\sum_{i=5}^{10} i$

Solución:

$$\sum_{i=5}^{10} i = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45$$

Ejemplo 4: $\sum_{h=1}^{6} 2$

Solución:

$$\sum_{h=1}^{6} 2+2+2+2+2+2=12$$

Ejemplo 5: Exprese cada suma en notación sigma:

(a) $5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3$

Solución:

$$5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3=\sum_{j=5}^{10} j^3$$

Ejemplo 6

(b) $\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+...+\sqrt{77}$

Solución:

$$\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+...+\sqrt{77}=\sum_{k=3}^{77}\sqrt{k}$$

Sin embargo, no hay forma única de escribir una suma en notación sigma, también la podemos representar de la siguiente manera:

Solución

(a) $\sum_{j=0}^{5}(5+j)^3$

(b) $\sum_{k=0}^{74}\sqrt{k+3}$

Las siguientes propiedades son resultado natural de las propiedades de los números naturales.

Propiedades de las sumas

Sean las sucesiones

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$$

y

$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots$$

Entonces, para todo entero positivo "n" y todo número real "c", sabemos:

1. $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

2. $\sum_{j=1}^{n}(a_j-b_j)=\sum_{j=1}^{n}a_j-\sum_{j=1}^{n}b_j$

3. $\sum_{i=1}^{n}ca_i=c(\sum_{i=1}^{n}a_i)$

4. $\sum_{i=1}^{n}(i)=\frac{n(n+1)}{2}$

5. $\sum_{i=1}^{n}(i^2)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

6. $\sum_{i=1}^{n}(i^3)=(\frac{n(n+1)}{2})^2$

1.3 Sumas de Riemann

Suma de Riemann

Sea *f* una función en [*a*, *b*] y tomemos una partición del intervalo [*a*, *b*], que denotaremos por $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ entonces llamamos **suma de Riemann** a una suma de la forma:

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

con $x_{k-1} \leq t_k \leq x_k$

De manera intuitiva esta suma representa la suma de áreas de rectángulos con base x_k - x_{k-1} y altura $f(t_k)$. Simbolizamos esta suma como *S(P, f)*, también se utiliza la notación más extensa pero más explícita:

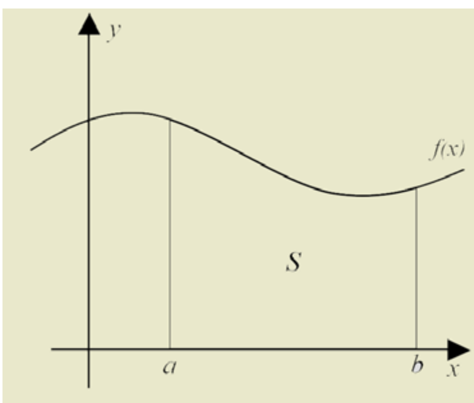
$$S(P, f, \{t_i\}_{i=1}^{n})$$

1.4 Definición de integral definida.

Definición:

Dada *f(x)* una función continúa y positiva en el intervalo *[a, b]*. Se define la integral definida, en el intervalo *[a, b],* como el área limitada por las rectas *x=a, x=b,* el eje OX y la gráfica de *f(x) y se nota*

$$\int_a^b f(x)dx$$



Si *f(x)* es una función continua y negativa en el intervalo *[a, b]* entonces se define la integral definida, en el intervalo *[a, b],* como el valor del área limitada por las rectas $x = a$, $x = b$, el eje OX y la gráfica de *f(x),* cambiado de signo.

Por lo tanto, se puede decir que $A(x+h) - A(x)$ es aproximadamente igual a $f(x)\cdot h$, y que la precisión de esta aproximación mejora al disminuir el valor de h. En otras palabras, $f(x)\cdot h \approx A(x+h) - A(x)$, convirtiéndose esta aproximación en igualdad cuando h tiende a 0 como límite.

1.5 Teorema de existencia.

Cuando f(x) es la razón de cambio de la función F(x) y f(x) = 0 en [a, b] entonces la integral definida tiene la siguiente interpretación:

$\int_a^b f(x)dx$ = cambio total en F(x) cuando x cambia de "*a*" a "*b*".

Decir que f(x) es la razón de cambio de F(x) significa que f(x) es la derivada de F(x) o equivalentemente que F(x) es una primitiva de f(x). El cambio total en F(x) cuando x cambia de "*a*" a "*b*" es la diferencia entre el valor de F al final y el valor de F al principio, es decir, F(b) - F(a).

$\int_a^b f(x)dx$ = F(b) - F(a).

1.6 Propiedades de la integral definida.

La integral de la suma de dos funciones es igual a la suma de las integrales de dichas funciones:

$$\int_a^b (\mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x)) \cdot \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{d}x + \int_a^b \mathrm{g}(x) \cdot \mathrm{d}x$$

La integral del producto de un número real k por una función es igual al producto de k por la integral de dicha función:

$$\int_a^b k \cdot \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{d}x = k \cdot \int_a^b \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{d}x$$

En una integral definida el límite superior de integración puede ser menor que el límite inferior de integración y

$$\int_a^b \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{d}x = -\int_b^a \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{d}x$$

Si hacemos a = b, en la igualdad anterior se tiene que

$$\int_a^a \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{d}x = -\int_a^a \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{d}x$$

Como el único número que coincide con su opuesto es el cero, llegamos a la conclusión de que

$$\int_a^a \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{d}x = 0$$

para cualquier número real a.

Dados tres números reales cualesquiera, a, b, c con a < b < c, se tiene que:

$$\int_a^c \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{d}x + \int_b^c \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{d}x$$

Si en el intervalo (a, b) la función f es mayor o igual que la función g entonces

$$\int_a^b \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{d}x \geq \int_a^b \mathrm{g}(x) \cdot \mathrm{d}x$$

En particular, si $\mathrm{f}(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces

$$\int_a^b \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{d}x \geq 0$$

Análogamente, si $0 \geq \mathrm{f}(x), \forall x \in (a, b)$, entonces

$$0 \geq \int_a^b \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{d}x$$

Si en el intervalo (a, b) la función f es mayor que la función g entonces

$$\int_a^b \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{d}x > \int_a^b \mathrm{g}(x) \cdot \mathrm{d}x$$

En particular, si $\mathrm{f}(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, entonces

$$\int_a^b \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{d}x > 0$$

Análogamente, si $0 > \mathrm{f}(x), \forall x \in (a, b)$, entonces

$$0 > \int_a^b \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{d}x$$

Ejemplo 1

$$\int_1^2 (x+1) \cdot \mathrm{d}x = \int_1^2 x \cdot \mathrm{d}x + \int_1^2 1 \cdot \mathrm{d}x$$

Ejemplo 2

$$\int_1^2 5 \cdot (x+1) \cdot \mathrm{d}x = 5 \cdot \int_1^2 (x+1) \cdot \mathrm{d}x$$

Ejemplo 3

$$\int_3^3 (x+1) \cdot \mathrm{d}x = \int_2^2 (x+1) \cdot \mathrm{d}x = 0$$

Ejemplo 4

$$\int_1^2 (x+1) \cdot \mathrm{d}x = -\int_2^1 (x+1) \cdot \mathrm{d}x$$

Ejemplo 5

Como $x > x^2,\ \forall x \in (0,\ 1)$, se cumple que

$$\int_0^1 x \cdot \mathrm{d}x > \int_0^1 x^2 \cdot \mathrm{d}x$$

Ejemplo 6

Como $x + 1 > 0,\ \forall x \in (1,\ 2)$, se cumple que

$$\int_1^2 (x+1) \cdot \mathrm{d}x > 0$$

1.7 Función primitiva.

La **integración** es la operación inversa de la **derivación**.

Dada una función f(x), diremos que F(x) es una **primitiva** suya si

$F'(x)=f(x)$

Nota: La primitiva de una función no es única; por ejemplo, si $f(x)=3x^2$, entonces $F_1(x)=x^3 + c_1$

$F_2(x)=x^3+ c_2$.

Propiedad: Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son primitivas de una misma función f(x), entonces se diferencian en una constante; o sea

$F_1(x) - F_2(x) = c_1 – c_2 = cte$.

Demostración:

$$F_1'(x) = F_2'(x) = f(x) \quad \forall x \Rightarrow F_1'(x) - F_2'(x) = 0 \quad \forall x \Rightarrow (F_1' - F_2')(x) = 0 \quad \forall x$$
$$\Rightarrow (F_1 - F_2)(x) = cte \quad \forall x \Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = cte \quad \forall x.$$

Si una función f(x) tiene una función primitiva F(x), entonces admite infinitas primitivas, cuyas expresiones serán

F(x)+K

siendo K una constante arbitraria.

Al conjunto de todas las primitivas de f(x), se le llama integral indefinida de f(x) y se le denota mediante

$$\int f(x)dx.$$

Por ejemplo:

$\int 3x^2 dx = x^3 + K$ siendo K una constante arbitraria.

Si existe la integral indefinida de una función, se dice que ésta es integrable.

1.8 Teorema fundamental del cálculo.

El **Teorema fundamental del cálculo integral** dice que la integral de una función es la inversa de la derivada, es decir, la derivada de la integral de la función es igual a la función.

Si f es continua en $[a,b]$, la función F está definida por:

$$F(x)=\int_a^b f(x)dx \qquad a \le x \le b$$

es continua en $[a,b]$

y derivable en (a,b)

y $F'(x)=f(x)$

Si f es continua en $[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

en donde F es cualquier antiderivada de f, esto es, $F'=f$.

Sea

$$g(x)=\int_a^x f(x)dx$$

Sabemos que

$g'(x)=f(x)$

Si F es cualquier antiderivada de f en $[a,b]$, donde F y g difieren en una constante.

Decimos que:

$$F(x) = g(x) + c \qquad a \leq x \leq b$$

Segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal

Si *f* es integrable sobre [*a, b*] y *f* = *F'* para alguna función *F*, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{30}$$

Esta igualdad es la famosa fórmula de Newton y Leibnitz, que reduce el problema de calcular la integral definida de una función a la obtención de una primitiva de la misma, y constituye así un enlace entre el cálculo diferencial y el integral.

Muchos de los problemas concretos estudiados por los más grandes matemáticos se resuelven automáticamente con esta fórmula, que establece sencillamente que la integral definida de la función *f* (*x*) en el intervalo [*a, b*] es igual a la diferencia entre los valores de cualquiera de sus primitivas en los extremos superior e inferior del intervalo. La diferencia (30) se acostumbra a escribir así:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

1.9 Cálculo de integrales definidas.

Se obtiene la integral F(x) y se evalúa en los límites:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{a^3}{3}$$

Ejemplos

1. Sea *f* (*x*) = *c*, una constante, y *f* (*x*) = *cx*; tendremos

$$\int_a^b c\,dx = cx\Big|_a^b = c(b-a)$$

2. Sea $f(x) = x$ y $f(x) = 1/2\, x^2$; tendremos

$$\int_0^5 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^5 = \frac{25}{2} - 0 = \frac{25}{2}$$

3. Sea $f(x) = x^3$ y $f(x) = 1/4\, x^4$; tendremos

$$\int_1^3 x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20$$

Calcule las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 (2x-3)\,dx$

b) $\int_1^2 \frac{5-x}{x^3}\,dx$

c) $\int_1^5 2\sqrt{x-1}\,dx$

d) $\int_0^a \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx$

e) $\int_{-2}^0 (x-2)(x+1)\,dx$

f) $\int_0^4 \left(1+2\sqrt{x}\right)^2 dx$

g) $\int_0^1 (2a+1)^4\,da$

h) $\int_1^e x.\ln x\,dx$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx$

j) $\int_0^3 (-x^2+x-1)\,dx$

k) $\int_{-2}^1 \left(\frac{1}{3}t-2\right)^2 dt$

l) $\int_{-3}^0 \frac{dx}{9+2x}$

m) $\int_0^\pi \cos(2x)\,dx$

1.10 Integrales Impropias.

La integral definida de $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{b}$.

$$\int_a^b f(x)dx; \textit{se llama integral impropia, si ocurre alguna de estas circunstancias}:$$

1. El integrando $\boldsymbol{f(x)}$ tiene uno o mas puntos de discontinuidad en el intervalo donde $\boldsymbol{a \le x \le b}$.

2. Al menos uno de los límites de integración es infinito.

Integrando discontinuo.

Si $\boldsymbol{f(x)}$ es continua en el intervalo donde $\boldsymbol{b \le x \le a}$ pero discontinua en $\boldsymbol{x = b}$ se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^b f(x)dx$$

En el supuesto que el limite exista.

Si $\boldsymbol{f(x)}$ es continua en el intervalo $\boldsymbol{a} < x < b$ y se tiene que es una discontinua en $\boldsymbol{x = a.}$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Limites infinitos de integración.

Si $f(x)$ es continua en todo el intervalo $\boldsymbol{a \le x \le u}$ se define como:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{u \to \infty} \int_a^u f(x)dx$$

Si $\boldsymbol{f(x)}$ es continua en el intervalo $\boldsymbol{u \le x \le b}$ la definimos como:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{x \to -\infty} \int_u^b f(x)dx$$

Unidad II

Integral indefinida y Métodos de integración

Objetivo

Discernir cuál método puede ser más adecuado para resolver una integral dada y resolverla usándolo.
Determinar una función primitiva.

2.1 Definición de integral indefinida.

Es el proceso contrario a la derivación.

Dada una función f(x), se trata de calcular otra F(x) tal que F'(x) = f(x)

Ejemplo: La derivada de y = 5x es y'= 5

La derivada de y = 5x+3 es y'= 5

La derivada de y = 5x-2 es y' = 5

Según la anterior definición, se puede decir que la integral de

5 es 5x+3 5x-2

Por ello se abrevia diciendo que la integral de 5 es 5x+cte.

El conjunto de todas las primitivas de una función se denomina **integral indefinida**, y se representa:

$$\int f(x)dx$$

En nuestro ejemplo $\int 5dx = 5x + c$

en donde dx indica cual es la variable (en este caso sólo existe una posible) y c es la cte.

Cualquier tabla de derivadas, leída al contrario, se convierte en una tabla de integrales.

2.2 Propiedades de integrales indefinidas.

PROPIEDADES

1. La integral de la derivada de una función es la función $\int f'(x)dx = f(x) + c$

2. La integral de la suma o diferencia de funciones es la suma o diferencia de las integrales de las funciones:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

3. La integral del producto de una constante por una función es el producto de la cte por la integral de la función:

$$\int [k \cdot f(x)]dx = k \cdot \int f(x)dx$$

2.3 Cálculo de integrales indefinidas.
2.3.1 Directas.

TIPOS DE INTEGRALES.

1. TIPO POTENCIAL

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

siendo **n diferente a -1**

Ejemplos: $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c \qquad \int 0 dx = c \qquad \int k dx = kx + c$

Si en vez de ser x es una función de x:

$$\int f^n(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

Ejemplo:

$$\int (5x)^2 dx = \frac{1}{5} \int (5x)^2 5 dx = \frac{(5x)^3}{3} + c$$

En el caso de ser **n=-1**, tenemos una integral de tipo logarítmico, como veremos posteriormente.

3. TIPO EXPONENCIAL.

$$\int e^u du = e^u + c$$

y en el caso de tratarse de una función:

Ejemplos:

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} \cdot 3 dx = \frac{1}{3} e^{3x} + c \qquad \int 3^{2x} dx = \frac{1}{2} \int 3^{2x} \cdot 2 dx = \frac{1}{2} \frac{3^{2x}}{\ln 3} + c$$

3. TIPO LOGARÍTMICO.

Es el caso comentado en las de tipo potencial cuando n=-1.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

Ejemplos:

$$\int tg(x)dx = \int \frac{sen(x)}{\cos(x)}dx = -\int \frac{-sen(x)}{\cos(x)}dx = -\ln|\cos(x)| + c$$

$$\int ctg(x)dx = \int \frac{\cos(x)}{sen(x)}dx = \ln|sen(x)| + c$$

4. TIPO SENO.

$$\int sen(x)dx = -\cos(x) + c \qquad \int sen f(x) \cdot f'(x)dx = -\cos f(x) + c$$

5. TIPO COSENO.

$$\int \cos(x)dx = sen(x) + c \qquad \int \cos f(x) \cdot f'(x)dx = sen f(x) + c$$

6. TIPO TANGENTE.

$$\int 1 + tg^2(x)dx = tg(x) + c \qquad \int \left[1 + tg^2 f(x)\right] \cdot f'(x)dx = tg\left[f(x)\right] + c$$

y por lo tanto:

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \int \sec^2(x)dx = tg(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx = \int \sec^2 f(x) \cdot f'(x)dx = tg(x) + c$$

7. TIPO COTANGENTE.

$$\int -(1 + \cot^2 x)dx = \int -\frac{1}{sen^2(x)}dx = \int -cosec^2(x)dx = \cot(x) + c$$

$$\int -\left[1 + \cot^2 f(x)\right] \cdot f'(x)dx = \int -\frac{f'(x)}{sen^2 f(x)}dx = \int -cosec^2 f(x) \cdot f'(x)dx = \cot f(x) + c$$

8. TIPO ARCOSENO.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsen(x)+c \qquad \int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{1-f^2(x)}} = arcsenf(x)+c$$

9. TIPO ARCOTANGENTE

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg(x)+c \qquad \int \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)} = arctagf(x)+c$$

EJERCICIOS:

1. $\int \frac{dx}{x^2}$

$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1}+c$

2. $\int 4dx$

$\int 4dx = 4x+c$

3. $\int \sqrt{8}dx$

$\int \sqrt{8}dx = \int x\sqrt{8}+c$

4. $\int (2+x)^2 dx$

$\int (2+x)^2 dx = \int (4+x^2+4x)dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + c$

5. $\int 3^x dx$

$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3}+c$

6. $\int 3^{x+2} dx$

$\int 3^{x+2} dx = \int 3^x \cdot 3^2 dx = 9\int 3^x = 9\frac{3^x}{\ln 3}+c$

7. $\int \sqrt[3]{3x^2}dx$

$\int \sqrt[3]{3x^2}dx = \sqrt[3]{3}\int x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3}\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{3x^5}+c$

8. $\int \cos^2 xdx$

$\int \cos^2 xdx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2}+\frac{sen 2x}{4}+c$

ya que:

$$1 = sen^2 x + \cos^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x$$

sumando:

$$1+\cos 2x = 2\cos^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

2.3.2 Con cambio de variable.

El método de integración por sustitución o por cambio de variable se basa en realizar un reemplazo de variables adecuado que permita convertir el integrando en algo sencillo con una integral o antiderivada simple. En muchos casos, donde las integrales no son triviales, se puede llevar a una integral de tabla para encontrar fácilmente su primitiva. Este método realiza lo opuesto a la regla de la cadena en la derivación.

Procedimiento práctico

Supongamos que la integral a resolver es:

$$\int_{-2}^{3} x\cos(2x^2+3)dx$$

En la integral reemplazamos $2x^2+3$ = *u*

$$\int_{-2}^{3} x\cos(u)dx$$

Ahora necesitamos sustituir también dx para que la integral quede sólo en función de u:

Tenemos que $2x^2+3=u$por tanto derivando se obtiene $4xdx=du$

Se despeja

$$dx=\frac{du}{4x}$$

y se agrega donde corresponde en:

$$\int_{-2}^{3} x\cos(u)\frac{du}{4x}$$

Simplificando:

$$\int_{-2}^{3} \cos(u)\frac{du}{4}$$

Debemos considerar si la sustitución fue útil y por tanto se llegó a una forma mejor, o por el contrario empeoró las cosas. Luego de adquirir práctica en esta operación, se puede realizar mentalmente. En este caso quedó de una manera más sencilla dado que la primitiva del coseno es el seno.

Como último paso debemos modificar los límites de integración. Sustituimos x por el límite de integración y obtenemos uno nuevo.

En este caso, como se hizo $u = 2x^2 + 3$:

$u_1 = 2(-2)^2 + 3 = 11$ (límite inferior)

$u_2 = 2(3)^2 + 3 = 21$ (límite superior)

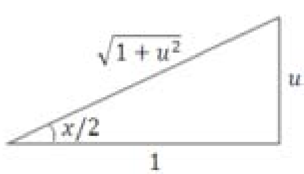
Luego de realizar esta operación con ambos límites la integral queda de una forma final:

$$\frac{1}{4}\int_{11}^{21} \cos(u)du = \frac{1}{4}(\mathbf{sen}(21) - \mathbf{sen}(11))$$

Supongamos ahora que la integral a resolver es:

$$\int \frac{1}{5 + 3\cos(x)} dx$$

Cuando las integrales son de tipo racional e involucra funciones trigonométricas, dígase: **sen(x)** y **cos(x)** la sustitución conveniente resulta ser $u = \tan(x/2)$:



$$\sin(x/2) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \cos(x/2) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

Entonces (por Teorema de la suma y la resta) $\cos(x) = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$

por otra parte

$$du = \frac{1}{2}\sec^2(x/2)dx$$ o $$dx = 2\cos^2(x/2)du = \frac{2du}{1+u^2}$$

la integral queda después de dicha sustitución:

$$\int \frac{du}{u^2+4} = \frac{1}{2}\arctan(u/2) + c = \frac{1}{2}\arctan(\frac{1}{2}\tan(x/2)) + c$$

2.3.3 Trigonométricas.

Integral que contiene potencias de senos y cosenos

$$\int sen^n x * cos^m x dx$$

En general, se intenta escribir un integrando en el que intervienen potencias de seno y coseno en una forma donde se tiene sólo un factor seno (y el resto de la expresión en términos de coseno) o sólo un factor coseno (y el resto de la expresión en términos de seno).

La identidad $sen^2 x + cos^2 x = 1$

permite convertir de una parte a otra entre potencias pares de seno y coseno.

Se tienen 3 casos:

Cuando n es impar

Cuando $n = 2k + 1$

Se puede apartar un factor del seno y sustituirlo por la identidad

$sen^2 x = 1 - cos^2 x$

Para poder expresar los factores restantes en términos del coseno:

$$\int sen^{2k+1} x * cos^m x dx$$

$$\int sen^{2k} x * cos^m x * sen x dx$$

$$\int (sen^2 x)^k * cos^m x * senx dx$$

$$\int (1 - cos^2 x)^k * cos^m x * senx dx$$

Al tener el integrando de esta forma se puede resolver por medio de sustitución haciendo:

$u = cos(x), \qquad du = -\, sen(x)dx$

Como en la expresión no se tiene un $-\, sen(x)dx$

Se multiplica ambos lados por (-1) y queda la expresión $-du = sen(x)dx$

La cual se puede sustituir:

$$-\int (1 - u^2)^k * u^m du$$

Cuando m es impar

Cuando $m = 2k + 1$, se puede de la misma manera apartar un factor de coseno y emplear $cos^2 x = 1 - sen^2 x$ para poder expresar los factores restantes en términos del $senx$:

$$\int sen^n x * cos^{2k+1} x dx$$

$$\int sen^n x * cos^{2k} x * cosx dx$$

$$\int sen^n x * (cos^2 x)^k * cosx dx$$

$$\int sen^n x * (1 - sen^2 x)^k * cosx dx$$

al hacer $u = senx$ y $du = cosxdx$ se tiene

$$\int u^n * (1-u^2)^k du$$

Cuando m y n son pares

Cuando dichas potencias son pares a la vez *n* = 2*k* y *m* = 2*p*, se puede aplicar las identidades de la mitad de ángulo

$$sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos2x \qquad cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos2x$$

algunas veces nos será útil utilizar la identidad

$$senx * cosx = \frac{1}{2} sen2x$$

$$\int cos^{2p} x * sen^{2k} x dx$$

$$\int (cos^2 x)^p * (sen^2 x)^k dx$$

sería igual a:

$$\int [\frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos2x]^p * [\frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos2x]^k dx$$

Ejemplo

Determine

$$\int sen^5 x \, cos^2 x dx.$$

Solución Lo primero que tenemos que ver es que la potencia impar la tiene la función seno, esto nos hace notar que estamos en el primer caso que describimos arriba, entonces aplicamos el algoritmo,

$$sen^5 x \, cos^2 x = (sen^2 x)^2 \, cos^2 x \, senx = (1 - cos^2 x)^2 \, cos^2 x \, senx$$

Sustituyendo $u = cos\, x$, tenemos $du = -sen\, x dx$ luego

$$\int sen^5x\ cox^2xdx = \int sen^4x\ cos^2xsenx\ dx$$

$$= \int (1 - cos^2x)^2\ cos^2x\ senx\ dx$$

$$= \int (1 - u^2)^2\ u^2\ (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)du$$

$$= -(\frac{u^3}{3}) - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C$$

$$= -\frac{1}{3}cos^3x + \frac{2}{5}cos^5x - \frac{1}{7}cos^7x + C$$

Integrales que contiene potencias de tangentes y secantes

$$\int sec^nx * tan^mxdx$$

Se puede usar una estrategia similar a la anterior.

Puesto que:

$$(\frac{d}{dx})tanx = sec^2x$$

Se puede separar un factor sec^2x y convertir la potencia restante (par) de la secante en una expresión relacionada con la tangente por medio de la identidad:

$sec^2x = 1 + tan^2x$

O bien, puesto que:

$$(\frac{d}{dx})secx = secxtanx$$

se puede separar un factor *secxtanx* y convertir la potencia restante (par) de tangente a secante.

Se tienen 5 casos:

1. Cuando n es par

n = 2*k* separar un factor de *sec*^{2}*x* y utilice *sec*^{2}*x* = 1 + *tan*^{2}*x* para lograr expresar los factores restantes en términos de *tanx*:

$$\int sec^{2k}x * tan^m xdx$$

$$\int sec^{2k-2}x * tan^m x * sec^2 xdx$$

$$\int (sec^2x)^{k-1} * tan^m x * sec^2 xdx$$

$$\int [1 + tan^2x]^{k-1} * tan^m x * sec^2 xdx$$

De esta manera podemos hacer *u* = *tanx* y *du* = *sec*^{2}*xdx* y el integral quedaría así:

$$\int [1 + u^2]^{k-1} * u^m du$$

2. Cuando m es impar

m = 2*k* + 1 apartar un factor de *secxtanx* y emplear *tan*^{2}*x* = *sec*^{2}*x* − 1 para poder expresar los factores que restan en términos de *secx*:

$$\int sec^n x * tan^{2k+1} xdx$$

$$\int sec^{n-1}x * tan^{2k} x * secx * tanxdx$$

$$\int sec^{n-1}x * (sec^2x - 1)^k * secx * tanxdx$$

De esta manera podemos hacer *u = secx* y *du = secx * tanxdx* y nos queda

$$\int u^{n-1} * (u^2 - 1)^k du$$

4. **La tangente tiene potencia par**

$$\int tan^{2k} x dx$$

$$\int tan^{2k-2} x * tan^2 x dx$$

$$\int tan^{2k-2} x * (sec^2 x - 1) dx$$

$$\int tan^{2k-2} x * sec^2 x dx - \int tan^{2k-2} x dx$$

4. La Secante tiene potencia impar $\int sec^{2k+1} x dx$

Al encontrarnos con este caso debemos integrar por partes.

5. Cuando no cabe en 1, 2, 3, 4

Al no encontrar la forma de ninguno de los pasos anteriores deberemos trasladarlo a *senx* y *cosx* recordando que:

$$secx = \frac{1}{cosx}$$

$$tanx = \frac{senx}{cosx}$$

Para otros casos, las directrices no son tan claras. Podría ser necesario usar identidades, integración por partes y, ocasionalmente, un poco de inventiva.

A veces será necesario poder integrar *tanx* por medio de la fórmula establecida:

$$\int tanx dx = ln|secx| + C$$

Se necesitará también la integral indefinida de la secante:

$$\int secx dx = ln|secx + tanx| + C$$

Esta última se podría comprobar mediante la derivación de lado derecho, o como sigue:

Primero se multiplican numerador y denominador por *secx* + *tanx* :

$$\int secx dx = \int secx \frac{secx + tanx}{secx + tanx} dx$$

$$= \int \frac{sec^2 x + secx tanx}{secx + tanx} dx$$

Si se sustituye *u* = *secx* + *tanx*, después *du* = (*secxtanx* + sec^2x)*dx*, también, la integral se convierte en:

$$\int (\frac{1}{u}) du = ln|u| + C$$

Así, se tiene:

$$\int secx dx = ln|secx + tanx| + C$$

2.3.4 Por partes.

El método de **integración por partes** es:

Eligiendo adecuadamente los valores de u y dv, puede simplificarse mucho la solución de la $\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$.

$d(uv) = udv + vdu$

$\int_a^b u(dv) = uv - \int_a^b vdu$

Para hacer más comprensible lo anterior se tiene:

$\boldsymbol{Hallar \int xlnxdx}$

Para utilizar la fórmula de la integración por partes, se debe dividir el integrando $\boldsymbol{xlnxdx}$ en dos partes $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{dv}$, de manera que se pueda hallar fácilmente $\boldsymbol{v}$ por integración y también resulte fácil hallar $\int \boldsymbol{vdu}$**.** En este ejemplo, sea

$\boldsymbol{u = lnx\ y\ dv = xdx}$. Entonces se tiene que $\boldsymbol{v = \frac{1}{2}x^2}$ y se observa que $\boldsymbol{du = \frac{1}{x}dx}$. Luego, la fórmula de la integración por partes da:

$$\int xlnxdx = \int udv = uv - \int vdu = (lnx)\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \int \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x}dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2lnx - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2lnx - \frac{1}{4}x^2 + c$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}x^2(2lnx - 1) + c}$$

EJEMPLOS:

1. $\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} - \int -e^{-x}2xdx$

$u = x^2 \qquad dv = e^{-x}dx$

$du = 2xdx \quad v = -e^{-x}$

$= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx$

$u = x \qquad dv = e^{-x}dx$

$du = 2xdx \;\; v = -e^{-x}$

$= -x^2e^{-x} + 2xe^{-x} - 2\int e^{-x}dx$

$= \boldsymbol{-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c}$

2. $\int x^2senxdx = -x^2cosx - \int -2xcosxdx$

$u = x^2 \qquad dv = senxdx$

$du = 2xdx \qquad v = -cosx$

$= x^2cosx + 2\int xcosxdx$

$u = x \qquad dv = cosxdx$

$du = dx \qquad v = senx$

$= x^2cosx + 2\left[xsenx - \int senxdx\right]$

$= x^2cosx + 2xsenx - 2\int senxdx$

$= \boldsymbol{x^2cosx + 2xsenx + 2cosx + c}$

3. $\int e^{2x}cos3xdx = \frac{1}{3}e^{2x}sen3x - \int \frac{2}{3}e^{2x}sen3xdx$

$u = e^{2x} \qquad dv = cos3xdx$

$du = 2e^{2x} \qquad v = \frac{1}{3}sen3x$

$\int e^{2x}cos3xdx = \frac{1}{3}e^{2x}sen3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}sen3x$

$u = e^{2x} \qquad dv = sen3x$

$du = 2e^{2x}dx \qquad v = -\frac{1}{3}cos3x$

$$\int e^{2x}cos3xdx = \frac{1}{3}e^{2x}sen3x - \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}e^{2x}cos3x + \int \frac{2}{3}e^{2x}cos3xdx\right]$$

$$\int e^{2x}cos3xdx = \frac{1}{3}e^{2x}sen3x + \frac{2}{9}e^{2x}cos3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}cos3xdx$$

$$\int e^{2x}cos3xdx + \frac{4}{9}\int e^{2x}cos3xdx = \frac{1}{3}e^{2x}sen3x + \frac{2}{9}e^{2x}cos3x$$

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}cos3xdx = \frac{1}{3}e^{2x}sen3x + \frac{2}{9}e^{2x}cos3x$$

$$\int e^{2x}cos3xdx = \frac{\frac{1}{3}e^{2x}sen3x + \frac{2}{9}e^{2x}cos3x}{\frac{13}{9}}$$

$$\int e^{2x}cos3xdx = \frac{3}{13}e^{2x}sen3x + \frac{2}{13}e^{2x}cos3x + c$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{13}[3sen3x + 2cos3x] + c}$$

4. $\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}\frac{x^3}{x}dx$

$u = lnx \qquad dv = x^2dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{1}{3}x^3$

$$= \frac{1}{3}x^3lnx - \frac{1}{3}\int x^2dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3lnx - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right] + c$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3lnx - \frac{1}{9}x^3 + c}$$

2.3.5 Por sustitución trigonométrica.

A menudo es posible hallar la antiderivada de una función cuando el integrando presenta expresiones de la forma:

$\sqrt{a^2-u^2}$, $\sqrt{a^2+u^2}$, ó bien $\sqrt{u^2-a^2}$; donde $a>0$ y u es una función de x.

1) Si un integrando contiene $\sqrt{\boldsymbol{a^2-x^2}}$, sustituir ***x=a senz***.
2) Si un integrando contiene $\sqrt{\boldsymbol{a^2+x^2}}$, sustituir ***x=a tanz.***
3) Si un integrando contiene $\sqrt{\boldsymbol{x^2-a^2}}$, sustituir ***x=a secz.***

Mas general un integrando que contenga las formas de: $\sqrt{\boldsymbol{a^2-b^2x^2}}$**,** $\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2x^2}}$ **ó** $\sqrt{\boldsymbol{b^2x^2-a^2}}$, pero ningún otro factor irracional puede ser transformado en otro que contenga funciones trigonométricas de una nueva variable como sigue:

CAMBIOS A REALIZAR POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMETRICA

Para:	Usar:	Obtener:
$\sqrt{a^2-b^2x^2}$	X = $\frac{a}{b}$ senz	a$\sqrt{1-sen^2z}$ = a cosz
$\sqrt{a^2+b^2x^2}$	X = $\frac{a}{b}$ tanz	a$\sqrt{1+tan^2z}$ = a secz
$\sqrt{b^2x^2-a^2}$	X = $\frac{a}{b}\,sec^2$	a$\sqrt{sec^2z-1}$ = a tanz

Tabla 1. Fuente Ayres, 2009.

EJEMPLOS:

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

$a^2=4 \quad a=2$

$x=2tanz$ - -- Ecuación 1

$dx=2sec^2zdz$

$\sqrt{4+x^2}=\sqrt{4+4tan^2z}$

$=\sqrt{4\,(1+tan^2z)}$

$=\sqrt{4}\,[[secz]^2]^{\frac{1}{2}}$

$=2secz$

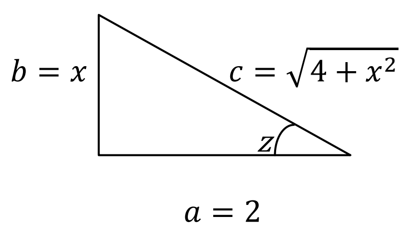
$$= \int \frac{2sec^2zdz}{4tan^2z2secz} = \frac{1}{4}\int \frac{seczdz}{tan^2z} = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{cosz}}{\frac{sen^2z}{cos^2z}}dz = \frac{1}{4}\int \frac{cos^2z}{coszsen^2z}dz$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{coszdz}{sen^2z} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2}$$

$u = senz$

$du = coszdz$

$$= \frac{1}{4}\int u^{-2}du = \frac{1}{4}\left[\frac{u^{-1}}{-1}\right] = -\frac{1}{4u} = -\frac{1}{4senz}$$



$$tanz = \frac{x}{2} = \frac{c.o}{c.a};$$

Retomamos la ecuación 1 y despejando a la función trigonométrica respectiva encontrar los catetos adecuados:

$$\boxed{\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}}$$

$C^2 = 4 + x^2$

$C = \sqrt{4 + x^2}$

$$\boldsymbol{= -\frac{1}{4senz} = -\frac{\sqrt{4 + x^2}}{4x} + c}$$

$$2. \int \frac{dx}{(9x^2 - 4)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\frac{2}{3}secz\, tanz}{8tan^3z} = \frac{1}{12}\int \frac{secz}{tan^2z} = \frac{1}{12}\int \frac{\frac{1}{cosz}}{\frac{sen^2z}{cos^2z}}dz = \frac{1}{12}\int \frac{cos^2z}{coszsen^2z}dz$$

$b^2 = 9 \quad a^2 = 4$

$b = 3 \qquad a = 2$

$$\boxed{x = \tfrac{2}{3} secz — Ecuación\ 1}$$

$$dx = \frac{2}{3} secz\, tanz\, dz$$

$$(9x^2 - 4)^{\frac{3}{2}} = \left(9\left(\frac{4}{9} sec^2 z\right) - 4\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= (4sec^2 z - 4)^{\frac{3}{2}}$$

$$= (4[sec^2 z - 1])^{\frac{3}{2}}$$

$$= [4tan^2 z]^{\frac{3}{2}}$$

$$= 4^{\frac{3}{2}}[tan^2 z]^{\frac{3}{2}}$$

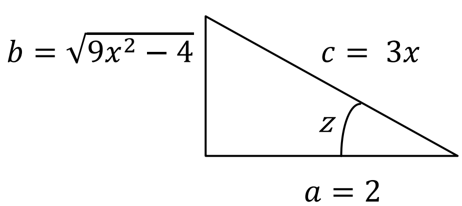
$$= \sqrt{4^3}[[tanz]^2]^{\frac{3}{2}}$$

$$= 8tan^3 z$$

$$= \frac{1}{12}\int \frac{cosz}{sen^2 z} dz = \frac{1}{12}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{12}\int u^{-2} du = \frac{1}{12}\frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{12u} = -\frac{1}{12senz}$$

$u = senz$

$de = coszdz$



$$secz = \frac{3x}{2} = \frac{h}{c.a}$$

Despejando a la función trigonométrica z de la ecuación 1 y poder encontrar los catetos de dicho triangulo rectángulo.

$$\boxed{\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}}$$

$b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = 9x^2 - 4$

$b = \sqrt{9x^2 - 4}$

$$= -\frac{1}{12senz} = -\frac{3x}{12\sqrt{9x^2-4}} + c$$

3. $\int \frac{(16-9\mathrm{x}^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{x}^6}\mathrm{dx} =$

$a^2 = 16 \qquad b^2 = 9$

$a = 4 \qquad b = 9$

$\sqrt{a^2 - b^2x^2}$

$\boxed{x = \frac{4}{3}senz --- Ecuacón\ 1}$

$dx = \frac{4}{3}coszdz$

$(16 - 9x^2)^{\frac{3}{2}} = [16 - 16sen^2z]^{\frac{3}{2}}$

$= \left[16[1 - sen^2z]\right]^{\frac{3}{2}}$

$= [16cos^2]^{\frac{3}{2}}$

$= \left[\sqrt{16^3}[cosz]^2\right]^{\frac{3}{2}}$

$= 64cos^3z$

$$\int \frac{64\cos^3\mathrm{z}(\frac{4}{3}\mathrm{coszdz})}{\frac{4096}{729}\mathrm{sen}^6\mathrm{z}} = \frac{243}{16}\int \frac{\cos^4\mathrm{z}}{\mathrm{sen}^6\mathrm{z}}\mathrm{dz} = \frac{243}{16}\int \frac{\cos^4\mathrm{z}}{\mathrm{sen}^4\mathrm{z}\mathrm{sen}^2\mathrm{z}}\mathrm{dz} = \frac{243}{16}\int \mathrm{cot}^4\mathrm{zcsc}^2\mathrm{zdz}$$

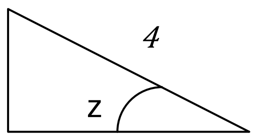
$u = cotz$

$du = -csc^2zdz$

$$= -\frac{243}{16}\int -cot^4zcsc^2zdz = -\frac{243}{16}\int u^4du = -\frac{243}{16}\left[\frac{u^5}{5}\right]$$

$$= -\frac{243}{80}u^5 = -\frac{243}{80}cot^5 z$$

b=3x



$$a = \sqrt{16 - 9x^2}$$

Retomamos la ecuación 1 y despejando a la función trigonométrica respectiva encontrar los catetos adecuados:

$$x = \frac{4}{3}senz$$

$$senz = \frac{3x}{4} = \frac{c.o}{h}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = 16 - 9x^2$$

$$a = \sqrt{16 - 9x^2}$$

$$= -\frac{243}{80}cot^5 z = -\frac{243}{80}\left[\frac{(16 - 9x^2)^{\frac{1}{2}}}{3x}\right]^5$$

$$= -\frac{243}{80}\frac{(16 - 9x^2)^{\frac{5}{2}}}{243x^5} = -\frac{\sqrt{(\mathbf{16 - 9x^2})^{\mathbf{5}}}}{\mathbf{80x^5}} + \boldsymbol{c}$$

$$4. \int \sqrt{x^2 + 4}dx = \int 2secz.2sec^2 zdz = 4\int sec^2 z.seczdz$$

$$a^2 = 4 \qquad a = 2$$

$$\boxed{x = 2tanz --- Ecuación\ 1}$$

$$dx = 2sec^2 zdz$$

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{4tan^2z+4}$$

$$= \sqrt{(1+tan^2z)+4}$$

$$= \sqrt{4}[[secz]^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2secz$$

$$= 4\int sec^2z.seczdz$$

$u = secz \qquad dv = sec^2z$

$du = secztanzdz \qquad v = tanz$

$$= 4\int sec^3zdz = secz.tanz - \int tan^2z.seczdz$$

$$= 4\int sec^3zdz = secz.tanz - \int [sec^2z-1]seczdz$$

$$= 4\int sec^3zdz = secz.tanz - \int sec^3zdz + \int seczdz$$

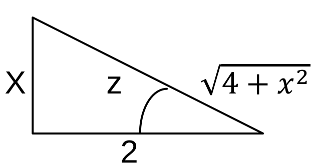
$$= 5\int sec^3zdz = secz.tanz + \int seczdz$$

$$u = z \qquad du = dz$$

$$= 5\int sec^3zdz = secz.tanz + \ln|cscu + tanu|$$

$$= \int sec^3zdz = \frac{secz.tanz + \ln|cscz + tanz|}{5}$$

$$= \int sec^3zdz = \frac{1}{5}secz.tanz + \frac{1}{5}\ln|secz + tanz|$$



Retomamos la ecuación 1 y despejando a la función trigonométrica respectiva encontrar los catetos adecuados:

$x = 2tanz$

$$tanz = \frac{x}{2} = \frac{c.o}{c.a}\ ; \qquad sec = \frac{h}{c.a}$$

$$= \frac{1}{5}\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}.\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + c$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{4+x^2}}{20} + \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + c}$$

2.3.6 Por fracciones parciales.

El **método de las fracciones parciales** consiste en reducir un cociente de polinomios en suma de fracciones más simples, que permitan obtener de manera inmediata una integral. El requisito más importante es que el grado del polinomio del denominador sea estrictamente mayor que el grado del numerador.

Para mayor claridad, sea:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0}$$

en donde: $m < n$. Para reducir la expresión a fracciones parciales se debe expresar la función $B(x)$ de la forma:

$$B(x) = (x + a_n)(x + a_{n-1})...(x + a_1)(x + a_0)$$

Ó

$$B(x) = (a_n x^2 + b_n x + c_n)(a_{n-1}x^2 + b_{n-1}x + c_{n-1})...(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)(a_0 x^2 + b_0 x + c_0)$$

es decir, como el producto de factores lineales o cuadráticos.

Al hacer lo anterior la expresión se puede expandir de acuerdo a estos 4 casos:

Factores lineales distintos

Donde ningún par de factores es idéntico.

$$\frac{A_1}{(x + a_1)} + \frac{A_2}{(x + a_2)} + ... + \frac{A_n}{(x + a_n)}$$

Donde $(A_1, A_2, ..., A_n)$

son constantes. Observe que en esta ecuación es una identidad debido a que es verdadero para todos los valores de x tales que ningún denominador es cero.

Factores lineales repetidos

Donde los pares de factores son idénticos.

$$\frac{A_1}{(x+a_1)} + \frac{A_2}{(x+a_1)^2} + ... + \frac{A_n}{(x+a_1)^n}$$

Donde $(A_1, A_2, ..., A_n)$ son constantes a determinar. Observe que en esta ecuación es una identidad debido a que es verdadero para todos los valores de x tales que ningún denominador es cero.

Factores cuadráticos distintos

Donde ningún par de factores es idéntico.

$$\frac{A_1x+B_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)} + \frac{A_2x+B_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)} + ... + \frac{A_nx+B_n}{(a_nx^2+b_nx+c_n)}$$

Donde $(A_1x+B_1, A_2x+B_2, ..., A_nx+B_n)$ son constantes a determinar. Observe que en esta ecuación es una identidad debido a que es verdadero para todos los valores de $x$tales que ningún denominador es cero.

Factores cuadráticos repetidos

$$\frac{A_1x+B_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)} + \frac{A_2x+B_2}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2} + ... + \frac{A_nx+B_n}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^n}$$

Donde $(A_1x+B_1, A_2x+B_2, ..., A_nx+B_n)$ son constantes a determinar. Observe que en esta ecuación es una identidad debido a que es verdadero para todos los valores de $x$tales que ningún denominador es cero.

Observación: Existen ejercicios que se resuelven con la combinación de los cuatro casos anteriores.

Para hallar las constantes, en el caso de *factores lineales distintos* se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$A_k = \left[\frac{A(x)}{B(x)}(x + a_k)\right]_{x=-a_k} \text{ en donde } \quad k = (1, 2, ..., n)$$

Para los otros casos no existe una formulación específica. Sin embargo estos se pueden resolver simplificando y formando un sistema de ecuaciones con cada una de las A_k, se resuelve el sistema y se obtienen los valores de los A_k.

Unidad III
Aplicaciones de la integral.

3.1 Áreas.
3.1.1 Área bajo la gráfica de una función.
3.1.2 Área entre las gráficas de funciones.
3.2 Longitud de curvas.
3.3 Cálculo de volúmenes de sólidos de sólidos de revolución.
3.4 Cálculo de centroides.
3.5 Otras aplicaciones.

Interpretar enunciados de problemas para construir la función que al ser integrada da la solución.
Resolver problemas de cálculo de áreas, centroides, longitud de curvas y volúmenes de sólidos de revolución.
Reconocer el potencial del Cálculo integral en la ingeniería.

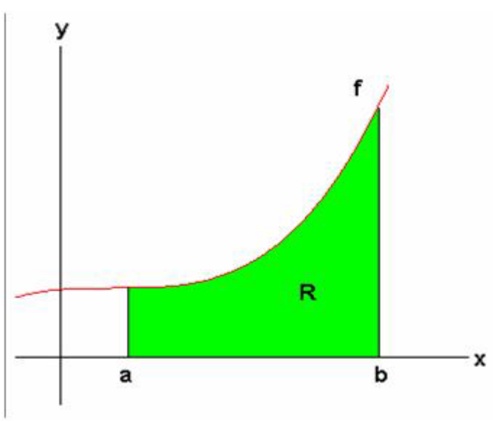
3.1 Áreas.

Refiriéndonos a la historia, el cálculo integral se dio a la luz gracias al problema geométrico de hallar áreas de regiones no poligonales, es decir de regiones con aspecto curvo. De hecho, vamos a mostrar, como poder hallar áreas haciendo uso de la integral. Comencemos dando una primera definición de la relación que existe entre la integral y el área (bajo curva en primera medida) de una región no poligonal

3.1.1 Área bajo la gráfica de una función.

Sí f es continua y no negativa en un intervalo cerrado [a, b], el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales x = a y x = b viene dada por:

$$Area = \int_a^b f(x)\,dx$$



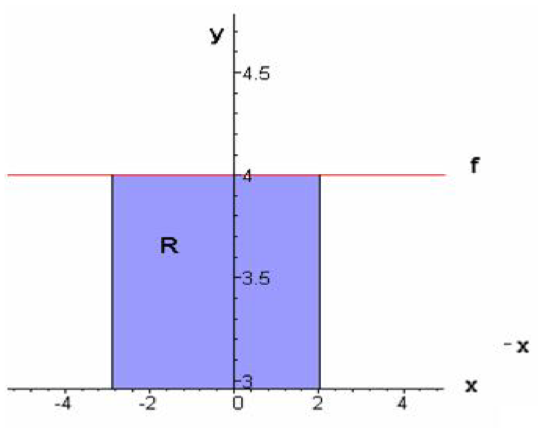
En ella se ve que f es una función continua, positiva (por encima del eje x), y la región R está limitada (acotada) por las rectas verticales x = a y x = b. Podemos hallar el área de la región R por medio de una integral definida aplicando la definición anterior.

Como lo hemos planeado, daremos algunos ejemplos para ver cómo se puede aplicar la definición.

EJEMPLO 1: Hallar el área de la región acotada por la curva y las rectas f(x) = 4 y x =−3 y x = 2.

SOLUCIÓN:

1. **TRAZO DE LA REGIÓN**: En primera medida, se debe trazar la región que se pide. Aquí f es positiva y continua.



2. **PLANTEAMIENTO DE LA INTEGRAL:** Aplicando la definición anterior, el área de la región R viene dado por:

$$A = \int_{-3}^{2} 4\,dx$$

3. **EVALUACIÓN DE LA INTEGRAL**: Ahora procedemos a evaluar la integral.

$$A = \int_{-3}^{2} 4\,dx = 4x \Big|_{-3}^{2}$$

$$= 4(2) - 4(-3) = 20$$

Luego el área de la región es 20 u^2.

Obsérvese que esta región es rectangular, luego se puede encontrar su área usando los métodos de la geometría. Desde este punto de vista se puede hacer lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
A &= bh \\
&= (2-(-3))(4) \\
&= (5)(4) \\
&= 20.
\end{aligned}
$$

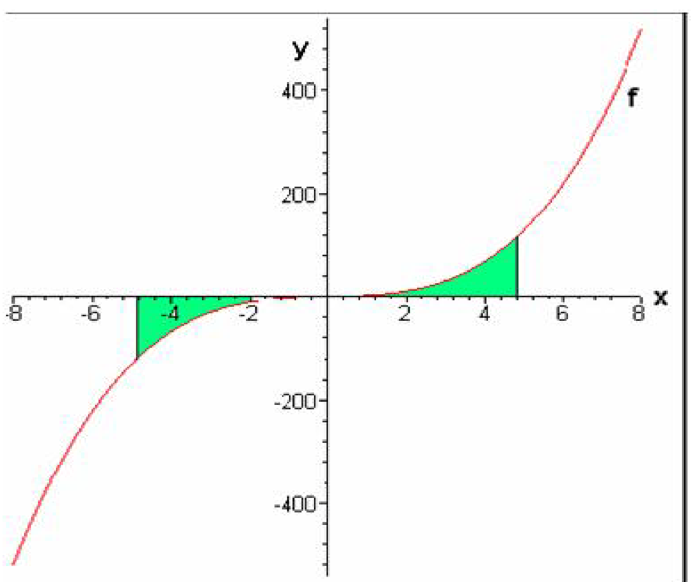
No es sorprendente que se hayan obtenido resultados equivalentes.

EJEMPLO 2: Hallemos el área de la región acotada por la curva

$f(x) = x^3 + x$ acotada por $[-5,5]$

SOLUCIÓN:

1. **TRAZO DE LA REGIÓN**: Presentamos el trazo de la curva junto con el intervalo de acotación sobre el eje x, por su puesto.



2. **PLANTEAMIENTO DE LA INTEGRAL:** Si se observa la figura anterior, las rectas $x=-5$ y $x = 5$ dividen la región en dos partes; A_1 y A_2 respectivamente. También se puede ver que el intervalo se puede dividir en dos, así: $[-5,5]$, $[-5,0]$ y $[-0,5]$. Luego el área de la región (sombreada) viene dada por:

$A = A_1 + A_2$

$$A = \int_{-5}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{5} (x^3 - x)\,dx$$

3. **EVALUCION DE LA INTEGRAL**: Ahora procedemos a evaluar la integral de la siguiente forma:

$$A = \int_{-5}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{5} (x^3 - x)\,dx \quad = \quad \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-5}^{0} + \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{5}$$

$$= \left|-\frac{(-5)^4}{4} - \frac{(-5)^2}{2}\right| + \frac{5^4}{4} + \frac{5^2}{2}$$

$$= \left|-\frac{675}{4}\right| + \frac{675}{4}$$

$$= \frac{675}{2}$$

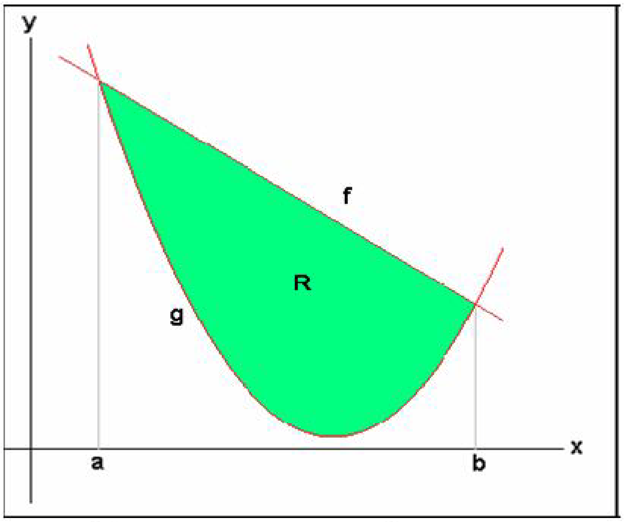
Luego el área de la región sombreada es de $\frac{675}{2}$ u^2.

3.1.2 Área entre las gráficas de funciones.

Para estas regiones en particular, no se es dado los límites de integración, que serían los puntos de corte entre dos gráficas. Más bien, para encontrarlos, basta hallar los x (o los y) para los cuales *f-g*. Por un momento observemos las siguientes gráficas, conservando las mismas condiciones de las definiciones anteriores: (dos funciones continuas en un intervalo cerrado, etc.) Aquí, para la primera gráfica, a y b son los puntos de corte de *f (x)* y *g(x)*. En la segunda gráfica, c y d son los puntos de corte de *f (y)* y *g(y)*. Ahora planteamos las definiciones correspondientes que sugieren las graficas:

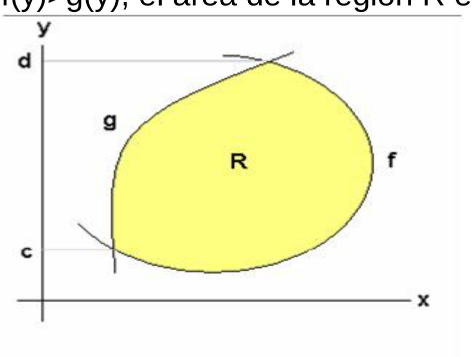
Definición 1*:* Dadas f y g positivas y continuas en un intervalo cerrado [*b,a*] con, *f(x)* > *g(y)*, el área de la región R está dada por:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



$$A = \int_c^d (f(y) - g(y))dy$$

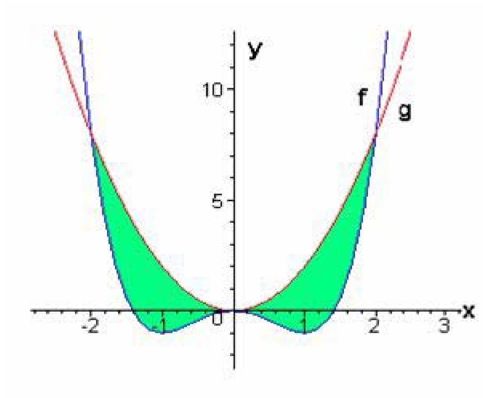
Definición 2: Dadas f y g positivas y continuas en un intervalo cerrado [*d,c*] con f(y)>g(y), el área de la región R está dada por:



EJEMPLO 1: Hallar el área de la región determinada por las curvas

$f(x) = 2x^2$ y $g(x) = x^4 - 2x^2$.

SOLUCIÓN: En primera medida trazamos la región correspondiente:



Ahora tenemos que encontrar los límites de integración, pero en la gráfica podemos decir que esos límites lo determinan los puntos de intersección de f y g. Como dijimos anteriormente, estos se hallan de la siguiente forma:

$$x^4 - 2x^2 = 2x^2$$
$$x^4 - 4x^2 = 0$$
$$x^2(x^2 - 4) = 0$$
$$x^2(x-2)(x+2) = 0$$

Luego **x=0, 2, –2** son los puntos de corte de ambas funciones. Después de esto, podemos establecer la integral que nos permitirá hallar el área de la región pedida:

$$A = \int_{-2}^{0} (2x^2 - (x^4 - 2x^2))\,dx + \int_{0}^{2} (2x^2 - (x^4 - 2x^2))\,dx$$
$$= \int_{-2}^{0} (-x^4 + 4x^2)\,dx + \int_{0}^{2} (-x^4 + 4x^2)\,dx$$
$$= \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{0}^{2}$$
$$= -\frac{4(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^5}{5} + \frac{4(2)^3}{3} - \frac{2^5}{5}$$
$$= \frac{8(2)^3}{3} - \frac{2(2)^5}{5}$$
$$= \frac{64}{3} - \frac{64}{5} = \frac{128}{15}$$

Luego el área de la región es

$$\frac{128}{5}$$

3.2 Longitud de curvas.

En matemática, la **longitud de arco**, también llamada **rectificación de una curva**, es la medida de la distancia o *camino recorrido* a lo largo de una curva o dimensión lineal. Históricamente, ha sido difícil determinar esta longitud en segmentos irregulares; aunque fueron usados varios métodos para curvas específicas, la llegada del cálculo trajo consigo la fórmula general para obtener soluciones cerradas para algunos casos.

Al considerar una curva definida por una función $f\,(x)$ y su respectiva derivada $f'\,(x)$ que son continúas en un intervalo *[a, b]*, la longitud *S* del arco delimitado por *a* y *b* es dada por la ecuación:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'\,(x)]^2}\, dx$$

En el caso de una curva definida paramétricamente mediante dos funciones dependientes de *t* como $x = f\,(t)$ e $y = g\,(t)$, la longitud del arco desde el punto $(f(a), g(a))$ hasta el punto $(f(b), g(b))$ se calcula mediante:

$$S = \int_a^b \sqrt{[f'\,(t)]^2 + [g'\,(t)]^2}\, dt$$

Si la función está definida por coordenadas polares donde la coordenadas radial y el ángulo polar están relacionados mediante $r = f(\theta)$, la longitud del arco comprendido en el intervalo $[\alpha, \beta]$, toma la forma:

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\, d\theta$$

En la mayoría de los casos, no hay una solución cerrada disponible y será necesario usar métodos de integración numérica. Por ejemplo, aplicar esta fórmula a la circunferencia de una elipse llevará a una integral elíptica de segundo orden.

Ejemplos:

1.-Calcular la longitud de arco de la siguiente curva $y = \sqrt{x^3}$

El dominio de la función es [0,+∞)

x	F(x)
0	0
1	1
2	2.8
3	5.1
4	8
5	11.18
6	14.69
7	18.52

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx$$

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x dx}$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x$$

$$du = \frac{9}{4}xdx$$

$$S = \frac{4}{9}\int_0^5 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{4}{9}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]$$

$$S = \frac{4}{9}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)u^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27}u^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27}\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3} \Big|_0^5$$

$$S = \frac{8}{27}\sqrt{\left[\frac{1+9(5)}{4}\right]^3} - \frac{8}{17}\sqrt{\left[1+\frac{9}{4}(0)\right]^3}$$

$$S = 12.70 - \frac{8}{27} = 12.40$$

Calcular la longitud de arco de la siguiente curva $8x^2 = 27y^3$, en los puntos A $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ y B $\left(8, \quad \frac{8}{3}\right)$

Despejo y

$$y^3 = \frac{8x^2}{27}$$

$$y = \left(\frac{8x^2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{8x^2}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{d}{dx}\left(\frac{8x^2}{27}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{8x^2}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{16}{27}x$$

$$S = \int \sqrt{1 + \left[\frac{16}{81}x\left(\frac{8x^2}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]^2}$$

$$S = \int \sqrt{1 + \left(\frac{16}{81}x\right)^2 \left[\left(\frac{8x^2}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]^2} \; dx$$

$$S = \int \sqrt{1 + \left[\frac{256}{6561}x^2 \left[\frac{8x^2}{27}\right]^{-\frac{4}{3}} dx\right]}$$

$$S = \int \sqrt{1 + \frac{256x^2}{6561\,\frac{(8x^2)^{\frac{4}{3}}}{(27)^{\frac{4}{3}}}}}\,dx$$

$$S = \int \sqrt{1 + \frac{256x^2}{6561\,\frac{[8x^2]^{\frac{4}{3}}}{81}}}\,dx$$

$$S = \int \sqrt{1 + \frac{256x^2}{\frac{104976x^{\frac{8}{3}}}{81}}}\,dx$$

$$S = \int \sqrt{1 + \frac{20736x^2}{104976x^{\frac{8}{3}}}}$$

$$S = \int \sqrt{1 + \frac{16}{81}x^{-\frac{2}{3}}dx} = \int \sqrt{1 + \frac{16}{81x^{\frac{2}{3}}}\,dx}$$

$$s = \int \sqrt{\frac{81x^{\frac{2}{3}} + 16}{81x^{\frac{2}{3}}}}\,dx = \int \frac{\sqrt{81x^{\frac{3}{2}} + 16}}{9x^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

$$u = 81x^{\frac{2}{3}} + 16$$

$$du = 54x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{54}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

$$S = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{54}\right)\int \frac{54\sqrt{8x^{\frac{3}{2}} + 16}}{x^{1/2}}\,dx$$

$$S = \frac{1}{486}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{486}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{486}\left[\frac{2}{3}\right]u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{1458}u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{1458}\sqrt{\left[(81)\sqrt[3]{x^2} + 16\right]^3}\ \Big|_1^8$$

$$S = \frac{2}{1458}\sqrt{\left[(81)\sqrt[3]{(8)^2} + 16\right]^3} - \frac{2}{1458}\sqrt{\left[(81)\sqrt[3]{(1)^2} + 16\right]^3}$$

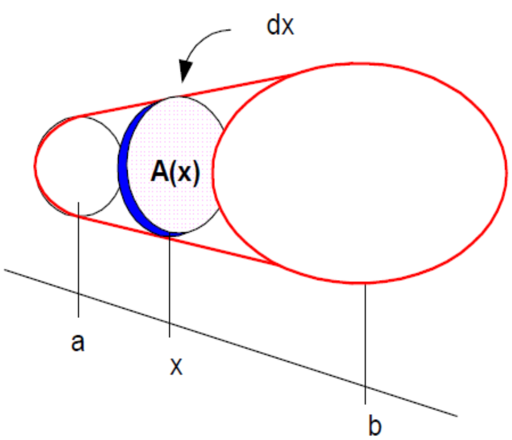
$$S = 19.35$$

3.3 Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.

Definición: El volumen de un sólido con área transversal conocida e integrable ***A(x)*** desde ***x = a*** hasta ***x = b***, es:

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Comúnmente a esta integración se le denomina "método de las rebanadas".

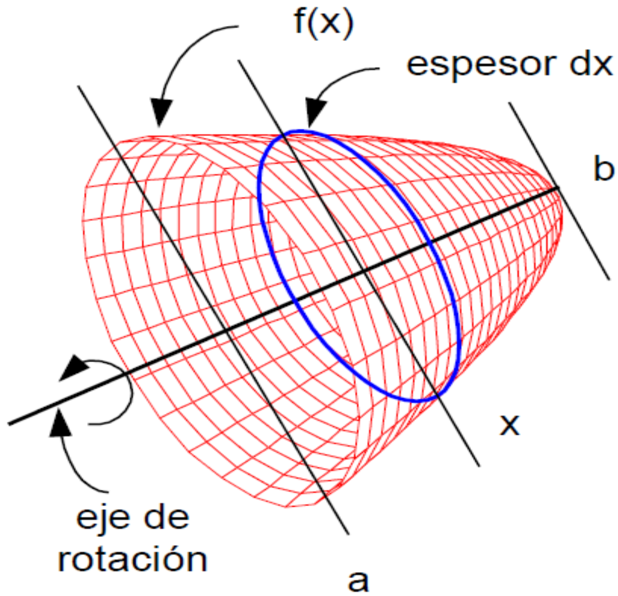


Si una gráfica de una función continua ***f(x)*** en el intervalo ***[a,b]*** se hace girar sobre el eje ***x***, a la superficie bajo la curva se le denomina "área generatriz", a la superficie delimitada por ***f(x)*** al girar se le llama "superficie de revolución" y al volumen delimitado por la superficie de revolución se le llama "sólido de revolución". La rotación no necesariamente se debe de efectuar sobre el eje **x**, pero sin pérdida de generalidad el eje siempre se puede ubicar en esa posición.

Volumen de un sólido de revolución (método de los discos):

El volumen de un sólido generado alrededor del eje *x* la región bajo la curva de *f(x)* en el intervalo *[a,b]* en que *f(x)* es continua es:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



El “disco” señalado en azul en la figura tiene radio ***f(x)*** de ahí empleando el área del círculo se obtiene la expresión previa.

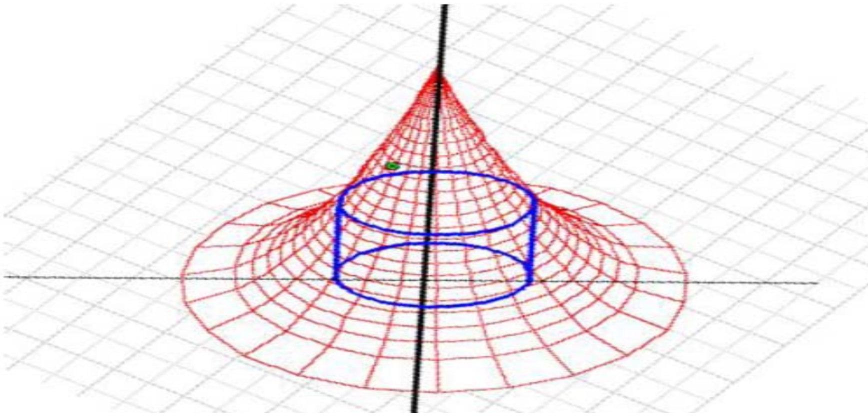
Si el volumen se genera por una superficie entre curvas, se generaliza el método de los discos y se le denomina método de las arandelas , en este caso si ***f(x)≥g(x)*** en ***[a,b]*** limitan la superficie, se tiene:

$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx$$

Volumen de un sólido de revolución (método de los tubos o casquillos cilíndricos):

El sólido de revolución generado por una función ***f(x)*** que gira alrededor del eje ***y***, limitado por las rectas ***x = a*** y ***x = b***, el eje ***x*** y la gráfica de ***f(x),*** tiene un volumen:

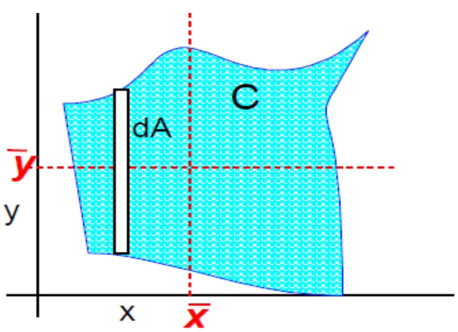
$$V = \int_a^b 2\pi (radio \quad del \quad tubo)(altura)dx = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$



En la figura se observa –en azul– un tubo típico de radio ***x***, espesor ***dx*** y altura ***f(x)***, que puede ser convertido en una lámina rectangular de superficie ***2πxf(x)*** y espesor ***dx***.

3.4 Cálculo de centroides.

Cuando una placa sólida es de espesor constante y homogéneo, su masa es directamente proporcional a su área, en donde la proporcionalidad depende del espesor de la placa y la densidad del material.



Definición: Las coordenadas del centro de masa de una placa plana delimitada por la superficie *A*, se definen como:

$$\bar{x} = \frac{\int_A y_m dA}{\int_A dA}; \bar{y} = \frac{\int_A x_m dA}{\int_A dA}$$

En donde la ***A*** bajo las integrales implica que éstas se realizan para toda la superficie, y_m y x_m corresponde con el punto medio del elemento ***dA***.
Cuando ***A*** está delimitada por ***f(x)*** y ***g(x)***, y ***f(x)>g(x)*** en ***[a,b]***:

$$A = \int_A dA$$

$$\int_A y_m dA = \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)+g(x)]\underbrace{[f(x)-g(x)]dx}_{dA} = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2 dx$$

y

$$\int_A x_m dA = \int_a^b x[f(x)-g(x)]dx$$

Debido al principio físico de la palanca, se define el momento o torque ***t*** de una fuerza respecto de un punto, como el producto de la magnitud de la fuerza y la distancia de la fuerza al punto, ***t = Fs***. Por otro lado, si consideras una placa plana de cualquier material y la cortaras en pequeños rectángulos de masa ***dm***, cada uno de ellos respecto de un eje elegido provocará un pequeño momento ***dt = sdm***, de donde el momento total será:

$$t = \int_A sdm$$

en donde se indica que la integral se realiza sobre toda el área. En particular si los ejes seleccionados son el ***x*** o el ***y***, y además el material de la placa es homogéneo, la masa es proporcional al área y los momentos se puedes expresar en función de las coordenadas ***y*** y ***x*** respectivamente. Así el momento total sobre el eje ***x*** e ***y*** son respectivamente:

$$t_x = \int_A ydA; \qquad t_y = \int_A xdA$$

¿Existirá algún valor de ***x*** en el que se pueda concentrar toda la masa de la placa y provoque el mismo momento total? ¿Se podrá dar una condición similar en ***y***? Supóngase que esos valores existen y son:

$$\bar{x},\bar{y} \Rightarrow \quad \bar{x}A = \int_A y\,dA, \quad \bar{y}A = \int_A x\,dA$$

O finalmente:

$$\bar{x} = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA}; \qquad \bar{y} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}$$

Estas coordenadas encontradas definen el ***centroide*** de la superficie o centro de gravedad de la placa.

3.5 Otras aplicaciones.

Área de una superficie de revolución
Partiendo de la longitud del arco y el método de tubos de altura diferencial ***dL*** se tiene:

Definición: Si la función ***f(x)≥0*** es suave en ***[a,b]***, el área de la superficie generada al girar la curva de ***f(x)*** alrededor del eje ***x*** es:

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Definición: Si la función ***g(y)≥0*** es suave en ***[c,d]***, el área de la superficie generada al girar la curva de ***g(y)*** alrededor del eje ***y*** es:

$$S = 2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy$$

Momentos de Inercia
En el contexto de la Dinámica de los cuerpos rígidos, la inercia es una medida de la resistencia que opone un cuerpo a que se produzca un cambio en su estado de

reposo o de movimiento. A mayor inercia mayor es la resistencia al cambio, de tal forma que si se aplica la misma fuerza a dos cuerpos, el de mayor inercia sufrirá el menor cambio en su estado de movimiento, o “reaccionará en forma más lenta”. Para el movimiento de translación la inercia es equivalente a la masa, pero para el movimiento de rotación depende de “momentos de inercia”.

En el caso de un sólido “plano”, el momento de inercia se mide respecto del punto en que se coloca el eje de rotación –cualquiera que se quiera– y se define para un punto de materia como $I = r^2 m$, donde ***r*** es la distancia del punto materia hasta el eje de rotación.

Para poder considerar un cuerpo completo se tendrá que $dI = r^2\, dm$ o finalmente:

$$I_{z/p} = \int_M r^2 dM$$

En donde nuevamente ***r*** es la distancia entre cada elemento diferencial de masa y el punto ***p*** (el eje de rotación), la integral se hace sobre todo el cuerpo de masa ***M***, ***z*** identifica que el cuerpo se pretende hacer girar sobre un eje perpendicular a la superficie y que pasa por ***p***. Si el cuerpo es homogéneo el peso se distribuye igualitariamente a lo largo del cuerpo y la masa dependerá del volumen y su densidad específica, a su vez si el cuerpo es de espesor constante ***t,*** el volumen depender de ***t*** y del área, por lo que finalmente se puede escribir:

$$I_{z/p} = t\rho \int_A (x^2 + y^2) dA$$

En donde ***r*** se sustituyó con respecto al teorema de Pitágoras. Resolviendo las integrales adecuadamente podrás comparar en donde conviene colocar el eje sobre un cuerpo que va a girar.

Unidad IV

Series

Objetivo

Identificar series finitas e infinitas en distintos contextos
Determinar la convergencia de una serie infinita.
Usar el teorema de Taylor para representar una función en serie de potencias y aplicar esta representación para calcular la integral de la función.

4.1 Definición de serie.

En matemáticas, una serie es la suma de los términos de una sucesión.
Se representa una serie con términos a_i como, donde N es el índice final de la serie.

$$\sum_{i=1}^{N} a_i$$

4.1.1 Finita.

Cuando N es finita, hace referencia a una serie finita.

4.1.2 Infinita.

Las series infinitas son aquellas donde i toma el valor de absolutamente todos los números naturales.

4.2 Serie numérica y convergencia.

Si esta sucesión de sumas parciales converge, se dice que la serie converge y tiene la suma indicada en la definición siguiente.

Definición de serie convergente y divergente

Dada una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, la ***n*-ésima suma parcial** está dada por

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdot \cdot \cdot + a_n.$$

Si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge a S, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge**. El límite S se llama **suma de la serie.**

$$S = a_1 + a_2 + \cdot \cdot \cdot + a_n + \cdot \cdot \cdot$$

Si $\{S_n\}$ diverge, entonces la serie **diverge**.

4.3 Serie de potencias.

Una serie de potencias alrededor de x=0 es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n$$

Una serie de potencias alrededor de x=c es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

En el cual el centro es c, y los coeficientes a_n son los términos de una sucesión.

4.4 Radio de convergencia.

Si nos limitamos al conjunto de los números reales, una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Con $a_n, x, x_0 \in \mathbb{R}$, recibe el nombre de serie de potencias centrada en $\boldsymbol{x_0}$. La serie converge absolutamente para un conjunto de valores de ***x*** que verifica que

$\boldsymbol{| x - x_0 | < r}$

donde **r** es un número real llamado **radio de convergencia** de la serie. Esta converge, pues, al menos, para los valores de ***x*** pertenecientes al intervalo $\boldsymbol{(x_0 - r, x_0 + r)}$, ya que la convergencia para los extremos de este ha de estudiarse aparte, por lo que el intervalo real de convergencia puede ser también semiabierto o cerrado. Si la serie converge solo para $\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{r = 0}$. Si lo hace para cualquier valor de ***x***, $\boldsymbol{r = \infty}$

4.5 Serie de Taylor.

En matemáticas, una **serie de Taylor** de una función *f(x)* infinitamente derivable (real o compleja) definida en un intervalo abierto (*a-r, a*+*r*) se define como la siguiente suma:

La función exponencial (en azul), y la suma de los primeros *n*+1 términos de su serie de Taylor en torno a cero (en rojo).

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Aquí, *n*! es el factorial de *n* y $f^{(n)}(a)$ indica la n-ésima derivada de *f* en el punto *a*.

Si esta serie converge para todo *x* perteneciente al intervalo (*a-r, a*+*r*) y la suma es igual a *f*(*x*), entonces la función *f*(*x*) se llama **analítica**. Para comprobar si la serie converge a *f*(*x*), se suele utilizar una estimación del resto del teorema de Taylor. Una función es analítica si y solo si se puede representar con una serie de potencias; los coeficientes de esa serie son necesariamente los determinados en la fórmula de la serie de Taylor.

Si *a* = 0, a la serie se le llama **serie de Maclaurin**.

4.6 Representación de funciones mediante la serie de Taylor.

A continuación se enumeran algunas series de Taylor de funciones básicas. Todos los desarrollos son también válidos para valores complejos de *x*.

Función exponencial y logaritmo natural

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \forall x; n \in \mathbb{N}_0$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad , \text{ para } |x| < 1$$

Serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{para } |x| < 1$$

Teorema del binomio

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-\alpha)} x^n \quad \text{para} |x| < 1$$

y cualquier α complejo

Funciones trigonométricas

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad , \forall x$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad , \forall x$$

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1} \quad , \text{ para } |x| < \frac{\pi}{2}$$

Donde B_s son los Números de Bernoulli.

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \quad , \text{ para } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\csc x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2^{2n-1}-1) B_n x^{2n-1}}{(2n)!} \quad , \text{ para } 0 < |x| < \pi$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad , \text{ para } |x| < 1$$
$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad , \text{ para } |x| < 1$$

Referencias

James – Stewart Cálculo de una variable. Edit. Thomson Editores.
Swokowski Earl W. Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica.
Roland E. Hostetler Robert P. Cálculo y Geometría Analítica Edit. McGraw Hill.
Zill Dennis G. Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica
Edwards Jr. C. H. y Penney David E. Cálculo y Geometría Analítica. Edit. Prentice Hall.
Fraleigh John B. Cálculo con Geometría Analítica. Edit. Addison- Wesley.
Anton Howard. Cálculo con Geometría Analítica Edit. Wiley.
Cuadernillo de ejercicios, Telésforo Zamorano Soriano
http://www2.uca.es/facultad/innova-empresariales/bego/matonline/int-impropias.html

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/integral_definida_ejff/primera.htm

http://portales.educared.net/wikiEducared/index.php?title=Propiedades_de_la_integral_definida"